**CAPÍTULO II - PARTE C: EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN**

* ***Extremos absolutos***

**Definición:**

**Sea z = f(x,y) una función de dos variables definida en una región cerrada y acotada S del plano x-y, y (a,b) un punto de S**

**f(a,b) es máximo absoluto en S  f(a,b) ≥ f(x,y) **

**f(a,b) es mínimo absoluto en S  f(a,b) ≤ f(x,y) **

****

z=x2 +y2

z=4-x2 –y2

Tiene un mínimo absoluto en (0,0)

Tiene un máximo absoluto en (0,0)

***Teorema de los valores extremos***

**Sea f(x,y) continua en una región S cerrada y acotada del plano x – y**

1. **Existe al menos un punto en S donde f alcanza un mínimo absoluto**
2. **Existe al menos un punto en S donde f alcanza un** máximo absoluto

**Aclaraciones:**

**Observe que si el extremo absoluto existe, este es único. Pero puede pasar, que lo tome en varios puntos del dominio:**





* ***Extremos locales***

**Definición:**



**Sea f(x,y) una función definida en una región R que contiene al punto ( a.b) en su interior**

1. **f tiene un mínimo local en (a,b) si f(x,y) ≥ f(a,b) para todo (x,y) en un disco abierto que contiene a (a,b)**
2. **f tiene un máximo local en (a,b) si f(x,y) ≤ f(a,b) para todo (x,y) en un disco abierto que contiene a (a,b)**

**Hemos marcado sólo algunos puntos, en los que se observa que hay un máximo local, ya que hay valores de la función que son mayores. Con los puntos rojos se indican algunos mínimos locales. En el (0,0) habría un máximo absoluto y local**

**Aclaración:**

* **Si un extremo absoluto se presenta en un punto interior al dominio, es también local.**



****

**En (0,0) hay un máximo absoluto y local. Ese valor es 1**

***Condición necesaria pero no suficiente para la existencia de extremos locales***

**Si la función z= f(x,y) tiene un extremo local en el punto (a,b) , y en dicho punto existen las derivadas parciales, entonces ambas derivadas parciales son nulas**

**Demostración:**

Intersectamos a la superficie con un plano paralelo al x-z, que contenga al punto (a,b)

La traza de la superficie, con ese plano, es una curva cuya ecuación es f(x,a) = g(x) ( curva negra sobre la superficie)

Como la superficie es diferenciable en (a,b), la curva g(x) es derivable, y si en dicho punto hay un extremo la derivada de g en a debe valer cero, es decir g’(a)=0



Por lo tanto g’ (a) = 

Observe que la recta tangente es paralela al plano x - y

De igual manera, pero buscando la traza con un plano paralelo al z –y , se puede demostrar que 



Observe que esta condición **no es suficiente** por que, que ambas derivadas parciales sean nulas no garantiza que tenga un extremo.

Por ejemplo z= y2 –x 2







En el punto (0,0) se cumple la condición

Pero no hay ni máximo ni mínimo, según lo

Indican las trazas de la superficie

Traza con el plano x-z: z = - x 2

Traza con el plano y-z: z = y2

Este punto se llama **PUNTO SILLA**

**PUNTO CRÍTICO**

**Definición:**

Sea z= f(x,y) una función definida en una región abierta S que contiene el punto (a,b). Dicho punto es punto crítico se si de alguna de las siguientes condiciones:

a)  y 

b) Que alguna o ambas derivadas parciales no existan

**Los extremos locales de una función solo se pueden presentar en puntos críticos**

Ejemplo: calcular los puntos críticos de las siguientes funciones:

A) z= x2 + y2 +2x -6y +6

Calculamos las derivadas parciales:





Ambas derivadas parciales deben ser nulas por lo tanto, se plantea un sistema de ecuaciones:

2x + 2 = 0 x = - 1

2y -6 = 0 y = 3

**Hay un solo punto crítico que es ( -1, 3)**

B) 

Calculamos las derivadas parciales:





Ambas derivadas no son nulas en ningún punto, ya que en (0,0) no están definidas pues se anula el denominador. Por lo tanto ese es el único punto crítico.

1. z= -5x2+4xy –y 2 +16x +10

Para hallar los puntos críticos, calculamos las derivadas parciales y las igualamos a cero





**Resolviendo el sistema por el método que quieran nos queda que hay un solo punto crítico que es P(8,16)**

* ***CALCULO DE EXTREMOS LOCALES***

**a) Por comparación:**

**La idea es buscar primero los puntos críticos y luego hallar la imagen de esos puntos.**

**Después comparar ese valor hallado con las imágenes de todos los puntos en un entorno pequeño del punto.**

**Ejemplo:**



Buscamos los puntos críticos:





**Resolviendo nos queda un solo punto crítico: Pc (0,0,0)**

**Calculamos ahora f(0,0) = 1**

**Comparamos :**

** si (x,y) ≠ (0,0) f(x,y) = x2 + y 2 + 1 > 1**



**Por lo tanto en (0,0) hay un mínimo local y absoluto y su valor es 1**

**b) Criterio de las derivadas segundas: Método del Hessiano**

Este criterio se utiliza para determinar si hay extremos locales.

**Enunciado:**

Sea z=f(x,y) una función con derivadas parciales segundas continuas en un entorno del punto (a,b) y ambas derivadas parciales son nulas en dicho punto ( es un punto crítico)

Sea H = el resultado del siguiente determinante:



a) Si H>0 ; y 

b) si H>0 ; y 

c) si H<0 entonces hay un punto silla en (a,b)

d) si H = 0 entonces el criterio no decide

**Ejemplo:**

z= x4 +y4 - 4xy+1





Resolviendo el sistema nos quedan tres puntos críticos: P1 (0,0) P2 (1,1) P3 (-1,-1)

Se arma el determinante :



Se calcula en cada punto crítico

En (0,0) 

En (1,1) 

En (-1,-1) 

Observe que para funciones de dos variables se puede dar que tenga dos mínimos y ningún máximo local



**Ejemplo:**

z= x2 + y2 +2x -6y +6

**Los puntos críticos ya fueron calculados y nos dió un único punto crítico P(-1,3)**

**Calculamos el Hessiano**

  

 

 según el criterio aplicado hay un mínimo local en P(-1,3)

Ejemplo:

z= x2.y2

Buscamos los puntos críticos:







Resolviendo el sistema vemos que hay infinitos punto críticos ya que todos los puntos de la forma (0,y) o (x,0) se anulan ambas derivadas.

En cualquiera de esos puntos el hessiano es cero:

  

Por lo tanto no sirve el método

¿Qué podemos hacer?

Podemos resolver el problema comparando el valor que la función toma en el punto crítico y en todos los otros puntos:

f(x,0)= 0

f(0,y) = 0

 f(x,y)>0 por lo tanto en todos los puntos críticos hay un mínimo local y absoluto a la vez

